MATHEMATIQUES (4 h)

On supposera qu'on ne connaît à priori aucune des propriétés du produit vectoriel, l'étude de celles-ci étant précisément l'objet du problème.

L'espace vectoriel E = $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sur le corps des réels est rapporté à sa base canonique B constituée des trois vecteurs $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$:

$\vec{I}$: (1,0,0) ; $\vec{J}$: (0,1,0) ; $\vec{K}$: (0,0,1) .

Si les composantes de $\vec{V} \in E$ et de $\vec{V}' \in E$ sont respectivement (x,y,z) et (x', y', z') on définit sur E le produit scalaire, noté $\langle \vec{V}, \vec{V}' \rangle$, de ces deux vecteurs par $\langle \vec{V}, \vec{V}' \rangle = x\,x' + y\,y' + z\,z'$ et la norme de $\vec{V}$, notée $\| \vec{V} \|$, par $\| \vec{V} \| = (\langle \vec{V}, \vec{V}' \rangle)^{\frac{1}{2}}$. Dans ces conditions E est euclidien et B est orthonormée.

$\vec{\omega}$ est un vecteur particulier de E dont aucune des composantes (a,b,c) n'est nulle et on pose $\omega = \| \vec{\omega} \|$

On admettra que le produit scalaire défini sur E détermine un isomorphisme entre E et son dual E^* et, en conséquence, que le transposé ${}^tL$ de tout endomorphisme L de E définit un endomorphisme de E noté aussi ${}^tL$: Relativement à B, la matrice ${}^tN$, transposée de la matrice N de L, est la matrice de l'endomorphisme ${}^tL$ de E.

L'espace affine $\hat{E}$ associé à E, ensemble des points de la géométrie ordinaire, est rapporté au repère orthonormé constitué du point $O \in \hat{E}$ et de la base B de E : on rappelle que pour tout point $P \in \hat{E}$ de coordonnées (x, y, z), le couple ordonné (O,P) de $\hat{E}$ est associé biunivoquement au vecteur $\vec{OP} \in E$ de composantes (x, y, z).

Alors à $\vec{\omega} \in E$ est associé le point $A \in \hat{E}$ de coordonnées (a,b,c), par la relation : $\vec{OA} = \vec{\omega}$.

I

On considère l'endomorphisme T de E qui à $\vec{V} \in E$, de composantes (x,y,z), fait correspondre $\vec{V}' \in E$ de composantes :

$$(x' = yc - zb \ , \ y' = z\,a - x\,c \ , \ z' = xb - y\,a).$$

On note $\vec{V}' = T(\vec{V}) = \vec{V} \wedge \vec{\omega}$.

On note M la matrice de T relativement à B.

On désigne par $\hat{T}$ l'application de $\hat{E}$ dans $\hat{E}$ qui a tout point P fait correspondre le point P' défini par :

$$\vec{OP'} = T(\vec{OP}) \ .$$

I-1- Calculer $\langle T(\vec{V}), \vec{V} \rangle$ et $\langle T(\vec{V}), \vec{\omega} \rangle$; déterminer le noyau de T. En déduire, sans utiliser M, que zéro est la seule valeur propre de T et déterminer le sous espace propre Ω correspondant. Retrouver ces deux derniers résultats en utilisant M. Montrer que ${}^tT = -T$. .../...

I-2- Montrer que l'image Π de E par T est un sous espace vectoriel que l'on caractérisera par l'équation que les composantes de ses éléments vérifient; en déduire l'image $\widehat{\Pi}$ de $\widehat{E}$ par $\widehat{T}$.

Montrer que tout $\vec{V} \in E$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\vec{V} = \vec{U} + \vec{W}$ dans laquelle $\vec{U} \in \Omega$ et $\vec{W} \in \Pi$. Déterminer $T(\vec{V}) - T(\vec{W})$ ainsi que les composantes de $\vec{U}$ et $\vec{W}$ dans B.

Démontrer que $\| T(\vec{V}) \|^2 = \omega^2 \| \vec{V} \|^2 - (\langle \vec{V}, \vec{\omega} \rangle)^2$ et en déduire l'expression de $\| T(\vec{V}) \|$ en fonction de ω et de $\| \vec{W} \|$.

Démontrer que la restriction Tr de T à Π est une bijection.

I-3- $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ étant des vecteurs quelconques de E dont les composantes sont respectivement (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2), on désigne par $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ le vecteur de composantes $(y_2 z_1 - z_2 y_1 , z_2 x_1 - x_2 z_1 , x_2 y_1 - y_2 x_1)$.

Soit Φ l'application de $\Pi \times \Pi$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout couple ordonné $(\vec{W}_1, \vec{W}_2)$ associe le nombre réel

$$\Phi(\vec{W}_1, \vec{W}_2) = \langle \vec{\omega} , \vec{W}_1 \wedge \vec{W}_2 \rangle .$$

Démontrer que Φ est une forme bilinéaire antisymétrique sur $\Pi \times \Pi$.

On oriente alors $\widehat{\Pi}$, qui est un plan, par Φ de la manière suivante : P_1 et P_2 étant deux points de $\widehat{\Pi}$, l'angle que fait $\overrightarrow{OP_2} \in E$ avec $\overrightarrow{OP_1} \in E$ est positif lorsque $\Phi(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2})$ est positif. Il en est ainsi dans toute la suite du problème.

Dans ces conditions, démontrer que la restriction $\widehat{Tr}$, de $\widehat{T}$ à $\widehat{\Pi}$ est une similitude $\widehat{S}$ dont on déterminera les éléments. Déterminer la nature géométrique de l'application $\widehat{F}$ de $\widehat{E}$ dans $\widehat{E}$ telle que $\widehat{T} = \widehat{S} \circ \widehat{F}$, composition de $\widehat{F}$ par $\widehat{S}$. Déterminer l'application $\widehat{S}'$ telle que $\widehat{T} = \widehat{F} \circ \widehat{S}'$.

II

$T^2 = T \circ T$ étant la composition de T par T, on définit successivement les endomorphismes de E : $T^3 = T \circ T^2$, ... $T^n = T \circ T^{n-1}$ pour tout $n > 1$.

On note M^n la matrice de T^n relativement à B.

On désigne par $\widehat{T}^n$ l'application de $\widehat{E}$ dans $\widehat{E}$ qui à tout point P associe le point P' défini par $\overrightarrow{OP'} = T^n(\overrightarrow{OP})$.

II.1 Démontrer que M^n est la puissance n^{ieme} de M.

II.2 Sans utiliser M^2 : Démontrer que zéro est valeur propre de T^2 et déterminer le sous espace propre correspondant; montrer que si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de T^2, alors Π est le sous espace propre correspondant et $|\lambda| = \omega^2$, puis déterminer le signe de λ en étudiant la nature géométrique de la restriction $\widehat{T}^2_r$ de $\widehat{T}^2$ à Π.

.../...

En utilisant M^2 : Retrouver les valeurs propres et les sous espaces propres de T^2; déterminer l'image de E par T^2 ainsi que celle de $\hat{E}$ par $\hat{T}^2$; si $\vec{V} \in E$ s'écrit $\vec{V} = \vec{U} + \vec{W}$, avec $\vec{U} \in \Omega$ et $\vec{W} \in \Pi$, retrouver l'expression de $\| T^2 (V) \|$ en fonction de ω et de $\| \vec{W} \|$; démontrer la relation :

$$T^2 (\vec{V}) = - \omega^2 \vec{V} + \langle \vec{V}, \vec{\omega} \rangle \vec{\omega} .$$

Montrer que T_r^2 est une bijection.

II.3 Démontrer que T^3 est proportionnel à T.

Si H est un polynome à coefficients réels A_o, A_1 ... A_n et d'indéterminée X ,

$$H (X) = A_n X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \ldots A_1 X + A_o ,$$

on désigne par H(T) l'endomorphisme de E défini par le polynome d'endomorphisme:

$$H (T) = A_n T^n + A_{n-1} T^{n-1} + \ldots + A_1 T + A_o I,$$

dans lequel I est l'application identique de E.

Dans le cas où H est le polynôme caractéristique de M, déterminer l'application H(T) de E.

Si $\omega < 1$, $\vec{V}$ étant un vecteur quelconque de E et P le point de $\hat{E}$ défini par $\vec{OP} = \vec{V}$, déterminer lorsque n tend vers l'infini la limite de $\| T^n(\vec{V}) \|$ et celle de $\hat{T}^n(P)$.

III

Le nombre réel α est différent de zéro.

III.1 **Sans utiliser les matrices qui leur correspondent, mais en se souvenant que α n'est pas valeur propre de T, démontrer que les endomorphismes $(\alpha I + T)$ et $(\alpha I - T)$ de E sont inversibles; exprimer les inverses $(\alpha I + T)^{-1}$ et $(\alpha I - T)^{-1}$ de ces deux endomorphismes sous forme de polynômes d'endomorphismes, à coefficients réels, de la forme :**

$$A_2 T^2 + A_1 T + A_o I.$$

(on pourra utiliser la division du polynôme caractéristique $H(\lambda)$ de M par $(\lambda + \alpha)$ et $(\lambda - \alpha)$).

III.2 **Soit $Q_\alpha = (\alpha I + T)^{-1} \circ (\alpha I - T)$ la composition de $(\alpha I - T)$ par $(\alpha I + T)^{-1}$.**

Montrer que cette composition est commutable et exprimer Q_α sous forme d'un polynome d'endomorphismes de E. En utilisant cette expression, montrer que Q_α admet Ω , quel que soit α , comme sous espace propre et déterminer la valeur propre correspondante. Retrouver ces résultats en appliquant directement $(\alpha I + T)^{-1} \circ (\alpha I - T)$ à Ω.

Montrer que Q_α est inversible et que son inverse Q_α^{-1} est l'endomorphisme que définit dans E le transposé ${}^t Q_\alpha$ de Q_α .

III.3 **On désigne par $\hat{Q}_\alpha$ l'application de $\hat{E}$ dans $\hat{E}$ qui à tout point P associe le point P' défini par la relation**

$$\vec{OP'} = Q_\alpha (\vec{OP}).$$

Montrer que $\hat{Q}_\alpha$ est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail